

Die Knobelecke

*Mathematik außerhalb des Unterrichts
am Theodor-Heuss-Gymnasium Pforzheim*

Musterlösung 4. Runde 2017/18

Klassenstufen 11 bis 13

Aufgabe 1

Die Dreierpotenzen ergeben nacheinander die folgenden Reste (bei der Division durch 13):

$$\begin{array}{lll} 3^0 : 13 = 0 & \text{Rest } 1 & 3^3 : 13 = 2 & \text{Rest } 1 & 3^6 : 13 = 56 & \text{Rest } 1 \\ 3^1 : 13 = 0 & \text{Rest } 3 & 3^4 : 13 = 6 & \text{Rest } 3 & \text{usw.} & \text{Rest } 3 \\ 3^2 : 13 = 0 & \text{Rest } 9 & 3^5 : 13 = 18 & \text{Rest } 9 & \text{usf.} & \text{Rest } \dots \end{array}$$

Alle Dreierpotenzen mit durch 3 teilbaren Exponenten haben also¹ den Rest 1, und so weiter, und so fort. Weil 2022 ein Vielfaches von 3 ist (die Quersumme $2+0+2+2 = 6$ ist durch 3 teilbar), muss die Division $3^{2022} : 13$ den Rest 1 ergeben, somit die Division $3^{2024} : 3$ den **Rest 9**.

Aufgabe 2

Die Winkelsumme des „inneren“ Fünfecks² HIJKL beträgt $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 540^\circ$. Nun betrachten wir die „äußeren“ Drei- und Vierecke. Bezeichnen wir der Einfachheit halber den Innenwinkel bei Ecke A mit $\angle A$ usw.:

- Dreieck AHL:
 $\angle A = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \varepsilon) = \alpha + \varepsilon - 180^\circ$
- Viereck BCIH:
 $\angle B + \angle C + (180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) = 360^\circ$, also $\angle B + \angle C = \alpha + \beta$
- Dreieck DJI (Rechnung wie bei AHL, siehe oben):
 $\angle D = \beta + \gamma - 180^\circ$
- Viereck EFKJ (Rechnung wie bei BCIH, siehe oben):
 $\angle E + \angle F = \gamma + \delta$

¹ Dies ist hier kein Zufall, sondern zwingende Notwendigkeit.

² Die Winkelsumme im Dreieck ist bekanntlich 180° , für jede Ecke kommt ein gestreckter Winkel (180°) hinzu.

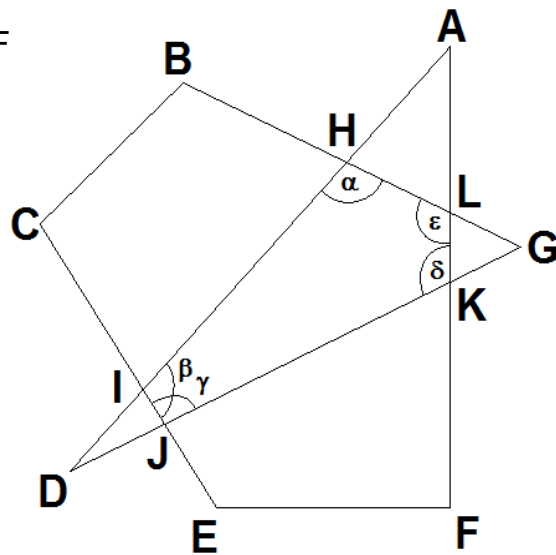
Die Knobelecke

*Mathematik außerhalb des Unterrichts
am Theodor-Heuss-Gymnasium Pforzheim*

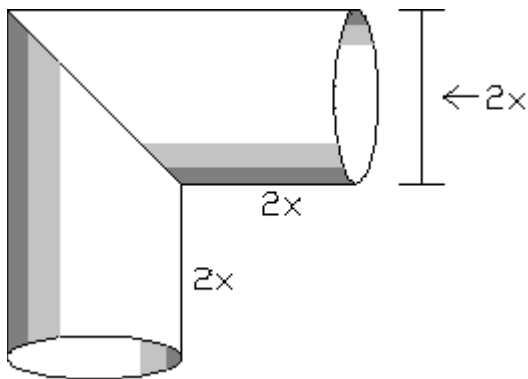
- Dreieck GLK (vgl. oben):
 $\angle G = \delta + \varepsilon - 180^\circ$

Insgesamt ergibt sich, die Außenwinkel aufsummiert:

$$\begin{aligned}
 & \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F \\
 & + \angle G \\
 = & \alpha + \varepsilon - 180^\circ + \alpha + \beta + \beta + \gamma \\
 & - 180^\circ + \gamma + \delta + \delta + \varepsilon - 180^\circ \\
 = & 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) - 540^\circ \\
 = & 2 \cdot 540^\circ - 540^\circ \\
 = & 540^\circ \\
 = & 6 \cdot 90^\circ
 \end{aligned}$$



Es ist also $n = 6$.



Aufgabe 3

Imagine the pipe straightened out, as if cut at the welded joint,³ then one half turned by 180° and welded again. You get *one straight pipe* of length $2x + 4x = 6x$, the diameter remaining $2x$.

Therefore, the surface area is:

$$2\pi x \cdot 6x = 12\pi x^2$$

³ Schweißnaht