Die Knobelecke

Mathematik außerhalb des Unterrichts
am Theodor-Heuss-Gymnasium Pforzheim

Musterlösung 2. Runde 2021/22
Klassenstufen 11 bis 13

Aufgabe 1

Sammy climbed up 3, down 5, up 7 and up 6 rungs, going up 11 in total. Since he started on the middle rung, there are 11 rungs above and 11 rungs below the middle rung. So there are **23 rungs** alltogether.

Aufgabe 2

$$\frac{1}{(x+1)y} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} = \frac{1}{(x+1)y} + \frac{y}{(x+1)y} + \frac{x+1}{(x+1)y} = \frac{1 + y + x+1}{(x+1)y}$$

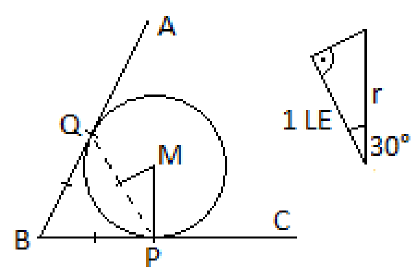
$= \frac{x+y+2}{xy+y}$. Wenn dieser Term den Wert $\frac{1}{4}$ haben soll, $\frac{x+y+2}{xy+y} = \frac{1}{4}$, erhalten wir: $4(x+y+2) = xy+y$, also $4x+4y+8 = xy+y$ und somit $4x+3y+8 = xy$ bzw. $20 = xy-4x-3y+12 = (x-3)(y-4)$. *q.e.d.*

Die Zahl 20 lässt sich wie folgt als Produkt natürlicher Zahlen schreiben:

$$1·20 = 2·10 = 4·5 = 5·4 = 10·2 = 20·1$$

Wenn dabei der erste Faktor (x–3) ist und der zweiter Faktor (y–4), dann entspräche das den Werten $(x|y) \in$ { (4|24) , (5|14) , (7|9) , (8|8) , (13|6) , (23|4) }, was für das Produkt xy die Werte { 96, 70, 63, 64, 78, 92 } ergibt. **63** ist also das kleinstmögliche Produkt xy.

Aufgabe 3



Wegen $\angle$PBQ=60° ist (aus Symmetriegründen) ΔBPQ gleichseitig. Daher ist $\angle$MPQ = $\angle$MPB–$\angle$QPB = 90°–60° = 30°. Und aus $\frac{1}{r} = \cos(30°)$ $= \sqrt{1-(\sin 30°)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}$ folgt $r = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1{,}155$ LE